Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabés
Devoir surveillé ■ Examen □

Année universitaire 2013/2014
Session : Principale ■ de Rattrapage □

Niveau d'Etude : 1ère Année GCR
Matière : Théorie de l'information
Date : 10 Février 2014
Nombre de pages : 2
Enseignant responsable : Raouia AYADI

Semestre : 2
Durée : 1.5h
Documents : autorisés □ non autorisés ■

Exercice 1 :

1. Donner les significations des termes suivants : $h(x_i)$, $H(X)$, $H(Y)$, $H(X/Y)$, $H(Y/X)$, $i(x_i, y_j)$ et $I(X ; Y)$.
2. Montrer les relations suivantes :
   a) $I(X ; Y) = H(X)-H(X/Y) = H(Y)-H(Y/X)$.
   b) $H(X,Y)=H(X)+H(Y)- I(X ; Y)$.
   c) Déduire que $H(X,Y)=H(X)+H(Y/X)=H(Y)+H(X/Y)$.
3. Représenter le diagramme de Venn.
4. Déterminer les relations entre ces quantités dans le cas :
   a) Canaux non-perturbés.
   b) Canaux très perturbés.

Exercice 2 :

On considère une source S qui émet les symboles a, b, c, d, e, f avec probabilités respectives 0.4, 0.1, 0.06, 0.1, 0.3 et 0.04.

1. Quelle est l'entropie de S ? Donner l'efficacité d'un code binaire de longueur fixe pour S.
2. Alice prétend avoir construit pour S un code binaire préfixé de longueur moyenne 2.1. Est-ce possible ? $H(S) \leq \pi \log_2 r$ $\delta H(S) = 2,12 > 2,1$
3. Bob propose le code suivant pour S : C(a) = 0, C(b) = 100, C(c) = 1100, C(d) =101, C(e) = 111, C(f) = 1101. Ce code est-il déchiffrable ? Décoder 1101011000101111. Ce code est-il plus efficace qu'un code binaire de longueur fixe ?
4. On souhaite coder S avec des mots ayant tous une longueur d'au plus 3.
   a) un mot d'un tel code peut-il avoir longueur 1 ?
   b) En déduire la longueur des mots de code que doit avoir un tel code pour être le plus efficace possible. Donner un tel code ; est-il plus efficace que celui de Bob ?

CamScanner

1) $h(x_i)$: quantité d'information de x_i

$H(X)$: entropie de X

$H(Y)$: entropie de Y

$H(X/Y)$: entropie conditionnelle de X par rapport Y — quantité d'info perdu

$i(x_i, y_i)$ = information mutuelle.

$I(X,Y)$: information mutuelle moyenne : quantité d'information émise par X et bien reçue par Y

$H(Y/X)$: quantité d'info erronnée.

2) $H_q : I(X,Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X)$.

or $I(X,Y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j)\, i(x_i, y_j)$.

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \left[h(x_i) - h(x_i/y_j) \right].$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \cdot h(x_i) - p(x_i, y_j) \cdot h(x_i/y_j).$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \cdot -\log_2 p(x_i) + p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i/y_j).$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \left[\log_2 \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \cdot -\log_2 p(x_i) + H(\cdot$$

2) Mq $I(X;Y) = H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X)$

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \right) \log_2 \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} -p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i) + p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i/y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} -p(x_i) \log_2 p(x_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \log_2 p(x_i/y_j)$$

$$I(X,Y) = H(X) - H(X/Y) \quad (1)$$

on utilisant le fait que $i(x_i, y_j) = i(y_j, x_i)$

$$\Rightarrow I(X,Y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j)\, i(y_j, x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \log_2 \frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \log_2 p(y_j/x_i) - p(x_i, y_j) \log_2 p(y_j)$$

$$= -H(Y/X) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) \log_2 p(y_j)$$

$$= -H(Y/X) - \sum_{j=1}^{M} p(y_j) \log_2 p(y_j)$$

$$= H(Y) - H(Y/X) \quad (2)$$

4) a) canaux non-perturbés :

$$\begin{cases} \Rightarrow H(X/Y) = 0 \\ I(X;Y) = H(X) = H(Y) - H(Y/X) \end{cases}$$

b) canaux déterministes :

$$\begin{cases} I(X,Y) = 0 \\ \Rightarrow H(X) = H(X/Y) \\ H(Y/X) = H(Y) \end{cases}$$

Exo

$S = \{a, b, c, d, e, f\}$ de prob resp $\{0,4 ; 0,1 ; 0,06 ; 0,1 ; 0,3 ; 0,04\}$

1). entropie $H(S) = \sum_{i=1}^{6} -p(x_i) \log_2 p(x_i)$.

$$= -0,4 \log_2(0,4) - 0,1 \log_2(0,1) - 0,06 \log_2(0,06) - 0,1 \log_2(0,1) - 0,3 \log_2(0,3) - 0,04 \log_2(0,04).$$

$$= 0,52 + (0,33)2 + 0,24 + 0,52 + 0,185$$

$H(S) = 2,12$ shannon / symbole.

- efficacité : $E = \frac{H}{\bar{n}}$ $\quad \bar{n} = \sum_{i=1}^{6} p(s_i) \cdot n(s_i)$.

$$H(S) \leq \bar{n} < H(S) + 1$$

$$2,12 \leq \bar{n} < 3,12$$

$\boxed{\bar{n} = 3}$.

$\Rightarrow$ $E = \frac{H(S)}{\bar{n}} = \frac{1,12}{3} = 0,70$

$\boxed{E = 0,7}$

2) on $1,11 \leq \bar{n} < 3,11$

$\bar{n} = 1.1$ $\Rightarrow$ il n'est pas possible de construire un code binaire par $\bar{n} = 1.1$

3) $c(a) = 0$, $c(b) = 100$ $c(c) = 1100$ $c(d) = 1$

$c(e) = 111$ $c(f) = 1101$.

ce code est préfixe $\Rightarrow$ déchiffrable.

car aucun code n'est le début d'un autre code.

- 11010 1000 101 111
  d(a) c(c) c(a) c(d) c(e)

$\bar{n} = \sum p(s_i) n(s_i) = 0,4 \times 1 + 0,1 \times 3 + 0,06 \times 4$

$+ 0,1 \times 3 + 0,3 \times 3 + 0,04 \times$

$\bar{n} = 1,3$

$E = \frac{H(S)}{1,3} = 0,92$.

$\boxed{E_2 > E_1 \Rightarrow \text{ce code est plus}}$

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès

Dép. : GCR

Module : **Théorie de l'information**

Dr Mohamed DADI

TD N°1

Exercice 1.

1. On lance une pièce dont les deux cotés sont identiques : pile. Quelle est l'entropie associée à cette expérience ?

2. On lance un dé équilibré à 6 faces. Quelle est l'information moyenne apportée par l'observation de la parité du résultat ?

3. Soit une source d'alphabet Ω = { 5,4,3,2,1 }. Calculer son entropie pour les distributions de probabilités suivantes:

   1. P1 = { 2.0,2.0,2.0,2.0,2.0 } distribution uniforme
   2. P2 = { 8.0,05.0,05.0,05.0,05.0 }
   3. P3 = { 25.0,15.0,3.0,2.0,1.0 }

4. On considère une urne contenant 4 boules rouges, 2 bleues, 1 verte et 1 jaune. Calculer son entropie. 2. On considère la phrase INSTITUT GALILEE Calculer son entropie.

5. Soit X une variable aléatoire de distribution (p1, p2, p3, p4)=(1/2 , 1/4 , 1/ 8 , 1/8). Quelle est l'entropie de X ? Quelle serait l'entropie maximale d'une variable aléatoire dans un ensemble à 4 éléments.

Exercice 2

Soit une source X discrète sans mémoire délivrant en sortie la séquence suivante :

"1 2 1 2 3 3 3 3 1 2 3 3 3 3 1 2 3 3 1 2"

1. Quels sont les symboles de cette source.
2. Calculer la fréquence d'apparition de chaque symbole
3. Déterminer sa probabilité d'occurrence
4. Calculer l'information propre de chaque symbole.
5. Calculer l'entropie de la source



CamScanner

Exercice 3

Trois lampes colorées sont utilisées sont utilisées dans un système de signalisation.

1. Combien de symboles pourraient être transmis par cette source sachant qu'un lampe est soit éteinte, soit allumée.
2. En déduire l'entropie permise par la taille de cet alphabet Entropie max
3. En réalité, seulement trois symboles équiprobables sont utilisés. Calculer l'entropie réelle de la source et en déduire sa redondance.

Exercice 4

Une source binaire produit des symboles 0 et 1 avec des probabilités 2/5 et 3/5. La durée d'émission d'un 0 est de 1 ms et celle d'un 1 est de 2 ms. Calculer :

a- L'entropie de cette source

b- Le débit moyen

b- Le taux d'émission.

Exercice 5

Des symboles e1, e2 et e3 sont émis à l'entrée d'un canal bruité avec des probabilités 0.6 ; 0.3 et 0.1 . Les symboles e1 émis sont reçus pour 3/5 comme des symboles r1, pour 1/5 comme des symboles r2 et 1/5 comme des symboles r3 . Les symboles e2 émis sont reçus pour 2/3 comme des symboles r2, et pour 1/3 comme des symboles r3. Le symbole e3 est reçu intégralement comme r3

a- Calculer les probabilités pour chaque symbole en sortie du canal.

b- Calculer l'information moyenne (entropie) apportée par les symboles à la sortie du canal

Exercice 6

Calculer l'entropie d'une image de résolution 320x200 avec 4 niveau de gris a) Dans le cas où le niveau de gris sont supposé équiprobable.

b) Dans le cas où les probabilité sont $\frac{4}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{2}{8}$.

CamScanner

TDN°1

Exercice 1

-1- $S = \{P, P\}$; $H(S) = \log_2(2) = 1$ Sh

-2- (l'information moyenne : $H(S)$
l'information propre $I(S)$)

• $P = \{P, I\}$ • $I = \{1, 3, 5\}$ • $P = \{2, 4, 6\}$

$H(S) = \log(2) = 1$ Sh

-3- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1. pour $P_1 = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2\}$

les symboles sont équiprobables $\Rightarrow H(S) = \log_2(5) = 2.32$ bits/symbole

2. pour $P_2 = \{0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.8\}$

(on ne peut pas dire, dans ce cas, que "4 symboles sont équiprobables" il faut que tous les symboles soit équiprobable.s)

$$H(S) = -\sum_{k=1}^{5} P_k \log_2(P_k) = -p(5)\log_2(p(5)) - p(4)\log_2(p(4)) - p(3)\log_2(p(3)) - p(2)\log_2(p(2)) - p(1)\log_2(p(1))$$

$$= -0,8\log_2(0,8) - 0,05 \times 4 \times \log_2(0,05) = 1,12 \text{ Sh}$$

3. pour $P_3 = \{0.1, 0.2, 0.35, 0.15, 0.25\}$

$$H(S) = -0,1\log_2(0,1) - 0,3\log_2(0,3) - 0,15\log_2(0,15) - 0,2\log_2(0,2) - 0,25\log_2(0,25)$$

$$= 2.22 \text{ Sh}$$

-4- $U = \{R, R, R, R, B, B, V, J\}$

$P_R = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ / $P_B = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ / $P_V = \frac{1}{8}$ / $P_J = \frac{1}{8}$

$$H(S) = -\frac{4}{8}\log_2\left(\frac{4}{8}\right) - \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) - 2 \times \frac{1}{8}\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= 1,75 \text{ Sh}$$

* S = { INSTITUT GALILEE }

Symbole = {I, N, S, T, U, G, L, A, E}

fréquence = {3, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 2}

probabilité = $\{\frac{3}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{3}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}\}$

$H(S) = -\sum_{k=1}^{9} P_k \log_2(P_k)$

$= -\frac{3}{15}\times 2 \log_2\left(\frac{3}{15}\right) - 3\times\frac{1}{15}\log_2\left(\frac{1}{15}\right) - \frac{5}{15}\log_2\left(\frac{1}{15}\right) - 2\times\frac{2}{15}\log_2\left(\frac{2}{15}\right)$

$= 3$ Sh

-5- $(p_1, p_2, p_3, p_4) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$

$H(X) = -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) - 2\times\frac{1}{8}\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$

$= 1,75$ Sh

* S = {a, b, c, d} $\quad H(S)$ est max si $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = \frac{1}{4}$

$H_{max}(S) = ?$ $\quad H_{max}(S) = \log_2(4) = 2$ Sh

Exercice 3 :

1) 3 Lampes → éteinte / allumée $\Rightarrow$ nb symboles $= 2^3 = 8$

2) (entropie par la taille ; entropie maximal)

$H = H_{max} = \log_2(N) = \log_2(2^3) = \log_2(8) = 3$ bits/symb

3) 3 symboles équiprobable $\Rightarrow H = \log_2(3) = 1,58$ bits/symb

Redondance (nbre de répétitions) $\quad \boxed{Re = 1 - \frac{H}{H_{max}}} \Rightarrow Re = 1 - \frac{1,58}{3} = 47,33\%$

Exercice 4 :

taux $T = D_s \cdot H$ (taux : débit, entropie)

$$D_s = \frac{1}{\sum p_i t_i}$$

$S = \{0,1\}$

$p_i = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}$

$t_0 = 1ms$

$t_1 = 2ms$

-a- $H(S) = -\sum_{i=1}^{2} p_i \log_2(p_i) = -\frac{2}{5}\log_2\left(\frac{2}{5}\right) - \frac{3}{5}\log_2\left(\frac{3}{5}\right)$

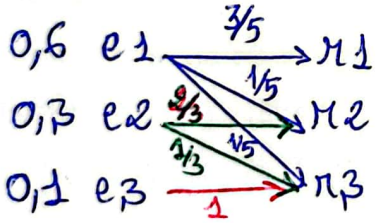
$= 0,97 \text{ bits/symbole}$

-b- $D_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2} p_i t_i} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\times 1 + \frac{3}{5}\times 2\right)\times 10^{-3}} = \frac{10^3}{8} = 625 \text{ symb/s}$

-c- $T = H D_s = 625 \times 0,97 = 606 \text{ bits/s}$

Exercice 5 :

$p(y) = p(y/x) \cdot p(x)$



-1- $p(r_1) = p(r_1/e_1) \cdot p(e_1) = \frac{3}{5}\times 0,6 = 0,36$

$p(r_2) = p(r_2/e_1) \cdot p(e_1) + p(r_2/e_2)\, p(e_2)$

$= \frac{1}{5}\times 0,6 + \frac{2}{3}\times 0,3 = 0,32$

$p(r_3) = p(r_3/e_1) \cdot p(e_1) + p(r_3/e_2)\, p(e_2) + p(r_3/e_3)\, p(e_3)$

$= \frac{1}{5}\times 0,6 + \frac{1}{3}\times 0,3 + 0,1 = 0,32$

-2- $S(r_1, r_2, r_3) = -\sum_{i=1}^{3} p_i \log_2(p(r_i))$

$= -\sum_{i=1}^{3}\left(p_1 \log_2 p(r_1) + p_2 \log_2 p(r_2) + p_3 \log_2 p(r_3)\right)$

$= -0,36 \log_2(0,36) - 2\times 0,32 \log_2(0,32) = 1,58 \text{ sh}$

Exercice 6 :

Image avec résolution : 320 × 200, 4 niveaux de gris

- 1 - Entropie : $H = \log_2(4) \times 64000 = 128000$ Sh

équiprobable → prob. de chaque niveau $\frac{1}{4}$ (c'est pour chaque pixel)

- 2 - $P_{n_1} = \frac{4}{8}$; $P_{n_2} = \frac{1}{8}$; $P_{n_3} = \frac{1}{8}$; $P_{n_4} = \frac{2}{8}$.

$$H = -\sum_{i=1}^{4} P_i \log(P_i) \times 64000 = -\left(\frac{4}{8}\log\frac{4}{8} + \frac{2}{8}\log_2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{2}{8}\log_2\left(\frac{2}{8}\right)\right) \times 64000$$

$\Rightarrow H = 112000$ Sh

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès

Module: **Théorie de l'information**

Td N°2

Enseignant: **Dr. Mohamed DADI**

Classes: GCR 1 (A+B) A.U : 2023-2024

Exercice 1

Parmi les codes suivants, lesquels sont préfixes ?

1.1. {1, 10, 100}

1.2 . {0, 01, 001}

1.3. {000, 001, 100, 111, 01}

1.4. {000, 001, 100, 111, 10}

1.5. {101, 010, 0}

Exercice 2

On considère une source S pouvant émettre 5 symboles, dont la probabilité p ide chacun figure dans le tableau ci-dessous. Ce dernier fournit également deux codages binaires possibles C1 et C2 de S. Indiquer si ces codes sont à longueur fixe ou variable puis avec ou sans préfixe. Calculer la longueur moyenne n1 et n2 de leurs mots :

Si ={s1 s2 s3 s4 s5}

pi={0.50 0.18 0.14 0.12 0.06 }

C1={0 10 11 101 1001 } v s

C2={00 10 11 010 011} v a

Exerciee 3

On considère une source S qui émet les symboles (a, b, c, d, e, f) avec probabilités respectives (0.15,0.27,0.20,0.10,0.05,0.23).

1. Calculer l'entropie H(S)

2. Calculer un code de Huffman pour S, et donner sa longueur moyenne et son efficacité (H(x)/l moyenne).

.3. Le code C défini par C(a) = 110, C(b) = 00, C(c) = 10, C(d) = 1110, C(e) =1111, C(f) = 01 est-il un code de Huffman pour S?.4. Même question pour le code C0 défini par C0(a) = 10, C0(b) = 00, C0(c) = 110, C0(d) = 1110, C0(e) = 1111, C0(f) = 01.

CamScanner

Exercice 4

Une source sans mémoire X émet 4 symboles x1, x2, x3 et x4 avec les probabilités suivantes : P(x1) = 1/2, P(x2) = 1/4 et P(x3) = P(x4) = 1/8. a) Construire un code de Huffman pour X. Montrer que chaque symbole porte un bit d'information par élément binaire, i.e. I(xi) = ni , où ni est le nombre d'éléments binaires du symbole xi . b) Calculer l'entropie de la source, la longueur moyenne des mots de code et l'efficacité de ce codage.

Exercice 5

Soit une source décrite par la variable aléatoire X qui peut prendre 6 valeurs {A, B, C, D, E, F} avec les probabilités {1/21, 2/21, 3/21, 4/21, 5/21, 6/21}

1°) Construire un code de Huffman binaire pour X. (le dessin de construction de codes)

2°) Tracer l'arbre du code finale (verticalement).

3°) Donner finalement les codes de chaque symbole de X

4°) Calculer l'entropie H(X) de ce code

.5°) Calculer la longueur moyenne de ce code

6°) Calculer l'efficacité de ce code.

7°) Calculer le rapport de compression entre le code de Huffman et le code ASCII (version 8 bits) pour cette exemple.

8°) Refaire le codage en appliquant le code de Fano-Shannon.

9°) Comparer les 2 codes (Huffman et Fano-Shannon) en terme d'efficacité. En déduire le code le plus performant des deux pour cet exemple.

Exercice 6

Soit une source décrite par la variable aléatoire X qui peut prendre 7 valeurs X= {A, B, C, D, E, F, G} avec les probabilités {1/28, 2/28, 3/28, 4/28, 5/28, 6/28, 7/28, 8/28}

1°) Construire un code de Huffman binaire pour X. (le dessin de construction de codes)

2°) Tracer l'arbre du code finale (verticalement).

3°) Donner finalement les codes de chaque symbole de X.

4°) Calculer l'entropie H(X) de ce code.

5°) Calculer la longueur moyenne de ce code.

6°) Calculer l'efficacité de ce code.

Fin de l'énoncé

CamScanner

Exercice 1 : 1.3.

Exercice 2 :

C_1 : variable ; sans préfixe
C_2 : variable ; avec préfixe

$S_i = \{s_1 ; s_2 ; s_3 ; s_4 ; s_5\}$
$P_i = \{0.50 ; 0.18 ; 0.14 ; 0.12 ; 0.06\}$
$C_1 = \{0, 10, 11, 101, 1001\}$
$C_2 = \{00, 10, 11, 010, 011\}$

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{5} n_i p_i$$

$\bar{n}_{C_1} = 1\times0,5 + 2\times0,18 + 2\times0,14 + 3\times0,12 + 4\times0,06 = 1,74$ bits

$\bar{n}_{C_2} = 2\times0,5 + 2\times0,18 + 2\times0,14 + 3\times0,12 + 3\times0,06 = 2,18$ bits

Exercice 3 : (a, b, c, d, e, f) et $(0,15 ; 0.27 ; 0.2 ; 0.1 ; 0.05 ; 0.23)$

-1- $$H(S) = -\sum_{i=1}^{6} p_i \log p_i = -(0,15\log(0,15) + 0,27\log(0,27) + 0,2\log(0,2) + 0,1\log(0,1) + 0,05\log(0,05) + 0,23\log(0,23)$$

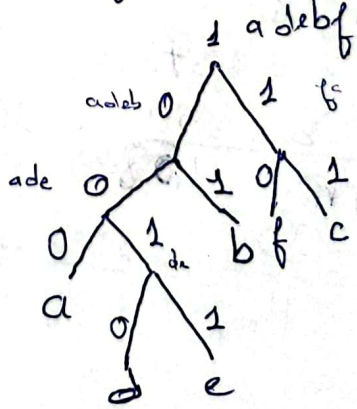
$\Rightarrow H(S) = 2,42$ sh

-2- Code de Huffmann :

1 b	0,27	1 b	0,27	1 b	0,27	0 ade	0,3	0 ade	0,3
0 f	0,23	0 f	0,23	0 f	0,23	1 b	0,27	1 b	0,27
1 c	0,2	1 c	0,2	1 c	0,2	0 f	0,23	1 fc	0,43
0 a	0,15	0 a	0,15	0 ade	0,3	1 c	0,2		
0 d	0,1	1 de	0,15						
1 e	0,05								

1 fc	0,43	1 fc	0,43
0 ade	0,3	0 adeb	0,57
1 b	0,27		

$\longrightarrow$ a debfc $\quad 0,43 + 0,57 = 1$



$a = 000$ | $e = 0011$
$b = 01$ | $f = 110$
$c = 11$
$d = 0010$

-3- $$\bar{n} = \sum_{i=1}^{6} n_i p_i = 3\times0,15 + 2\times0,27 + 2\times0,2 + 4\times0,1 + 4\times0,05 + 2\times0,23$$
$= 2,45$ bits

Efficacité $= \frac{H(S)}{\bar{n}} = \frac{2,42}{2,45} = 98\%$

-3- $\bar{n}_C = 3\times0,15 + 2\times0,27 + 2\times0,2 + 4\times0,1 + 4\times0,05 + 2\times0,23 = 2,45$ bits

$\bar{n}_{C_0} = 2\times0,15 + 2\times0,27 + 3\times0,2 + 4\times0,1 + 4\times0,05 + 2\times0,23 = 2,5$ bits

$\Rightarrow$ C n'est pas un code de Huffmann

Exemple :

$S = \{A, B, C\}$; $P = \left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right\}$; $D_s = 100$ symbol/s

-1- $H(S) = -\sum_{i=1}^{3} p_i \log_2(p_i) = -\left(\frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\log_2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{5}{8}\log_2\left(\frac{5}{8}\right)\right)$

$H_{max} = \log_2(3) = 1,58$ sh

-2- Taux d'émission $= D_s H(S) = 100 \times 1,298 = 129,8$ bits/s

-3- Debit $= 150$ bit/s

$C = 150$ bit/s $>$ Taux $= 129,8$ $\Rightarrow$ on peut transmettre la totalité de l'inf via la canal binaire avec un debit de 150 bit/s.

* Codage de Shannon - Fano :

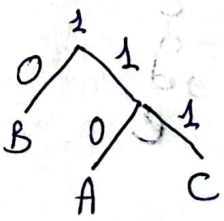
A $\frac{1}{4}$	B $\frac{5}{8}$	$\xrightarrow{0}$		$\xrightarrow{0}$		$A = 10$
B $\frac{5}{8}$	$\longrightarrow$ A $\frac{1}{4}$	$\xrightarrow{1}$	$\frac{0}{1}$		$\longrightarrow$	$B = 0$
C $\frac{1}{8}$	C $\frac{1}{8}$			$\xrightarrow{1}$		$C = 11$

$\overline{n} = \sum_{i=1}^{3} n_i p_i = \frac{1}{4} \times 2 + 1 \times \frac{5}{8} + \frac{1}{8} \times 2$

$= 1,37$ bits

* Codage Huffmann :

A 0 $\frac{1}{4}$	B $\frac{5}{8}$	B 0 $\frac{5}{8}$			
B 0 $\frac{5}{8}$	$\longrightarrow$ A 0 $\frac{1}{4}$	$>$ AC 1 $\frac{3}{8}$	$>$	BA 1 C $\frac{8}{8} = 1$	
C 1 $\frac{1}{8}$	C 1 $\frac{1}{8}$				



B = 0
A = 10
C = 11

$\Rightarrow \overline{n} = 1,37$ bits

-5- $V = \frac{D_b}{H(s)} = \frac{150}{1,298} = 116,27$ symb/s

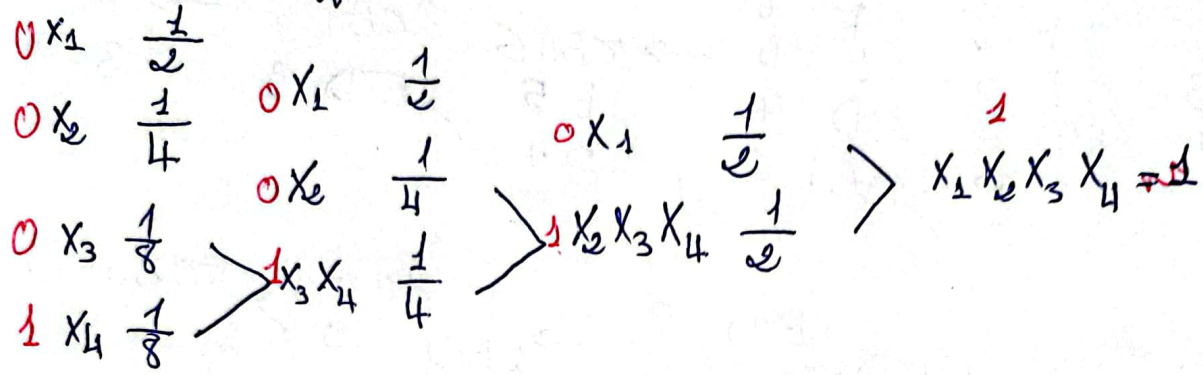
$V_{min} = \frac{D_b}{H_{max}} = \frac{150}{1,58} = 94,98$ symb/s

Exercice 4 :

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$P_{x_i} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\}$

-1- Code de Huffman pour X.



$x_1 = 0$ $x_3 = 110$

$x_2 = 10$ $x_4 = 111$

-2- $I(x_i) = -\log_2(P_i)$ avec $P(x_i) = P_i$

$I(x_1) = -\log_2(\frac{1}{2}) = 1$ bit ; $I(x_2) = -\log_2(\frac{1}{4}) = 2$ bit ; $I(x_3) = I(x_4) = 3$ bit

-3- ⊛ L'entropie de X : $H(X) = -\sum_{i=1}^{4} P_i \log_2(P_i) = -\frac{1}{2}\log_2(\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}\log_2(\frac{1}{4}) - \frac{1}{8}\log_2(\frac{1}{8}) - \frac{1}{8}\log_2(\frac{1}{8}) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ Sh $= 1{,}75$ Sh

⊛ La longueur moyenne :

$\overline{n} = \sum_{i=1}^{4} n_i P_i = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{2}{8} = \frac{7}{4} = 1{,}75$ bits

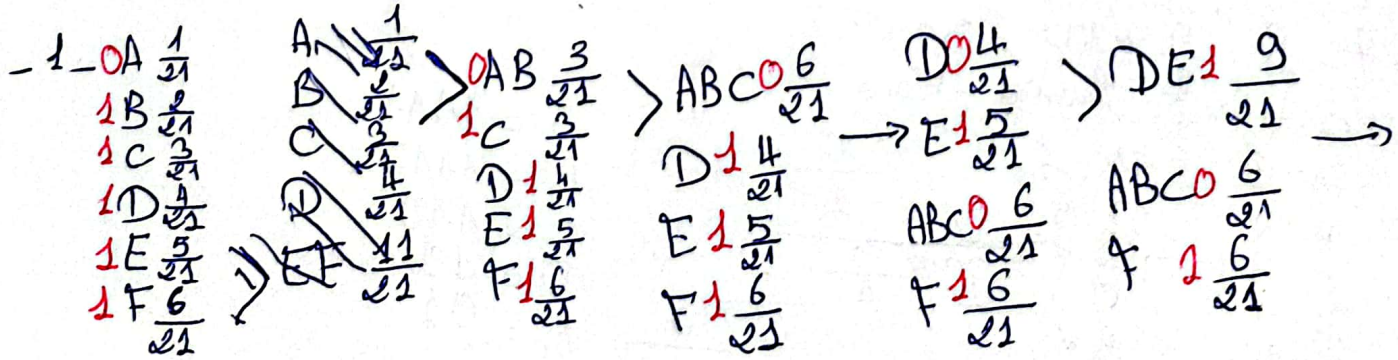
⊛ Efficacité $= \frac{H(X)}{\overline{n}} = \frac{1{,}75}{1{,}75} = 100\%$

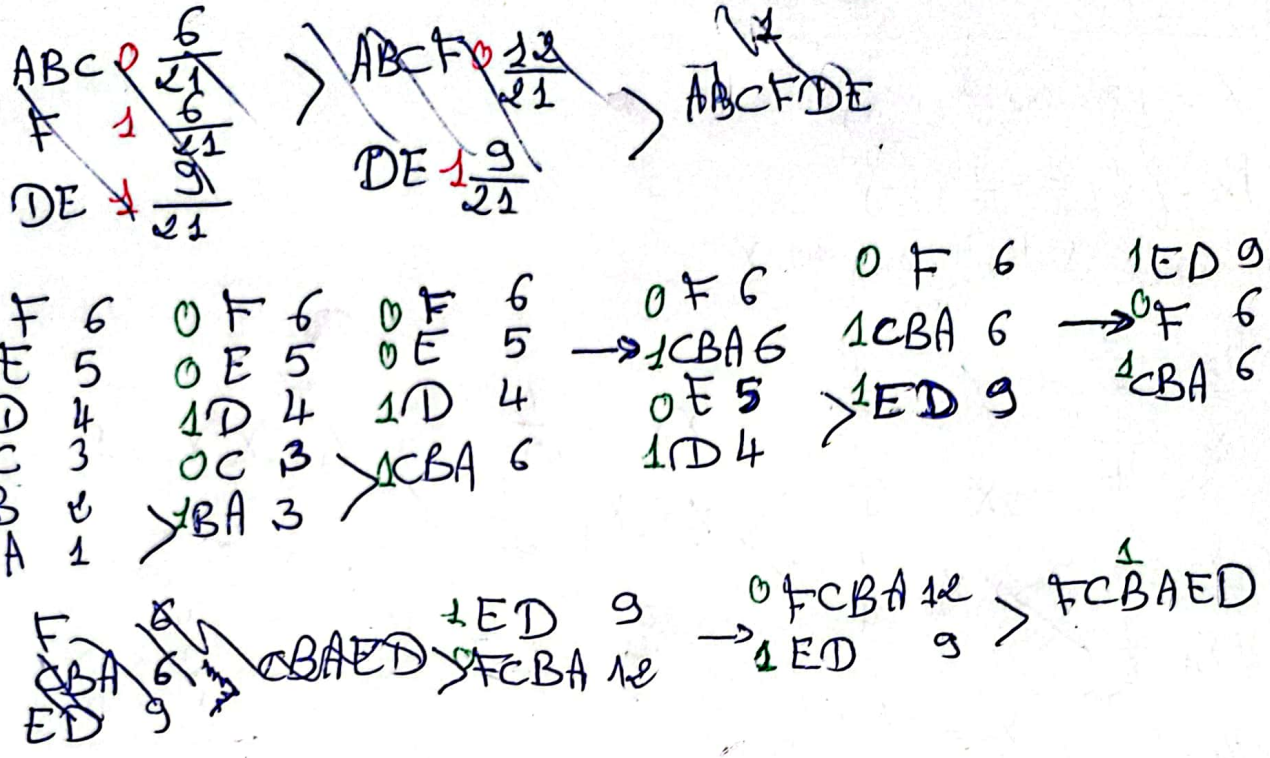
Exercice 5 :

$X = \{A, B, C, D, E, F\}$

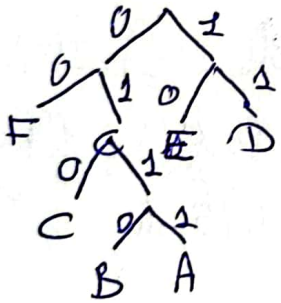
$P_i = \{\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{3}{21}, \frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \frac{6}{21}\}$

-1-





-2- FCBAED



-3- A = 0111
B = 0110
C = 010
D = 11
E = 10
F = 00

-4- $H(X) = -\sum_{i=1}^{6} P_i \log_2 P_i) = 2,398$ Sh

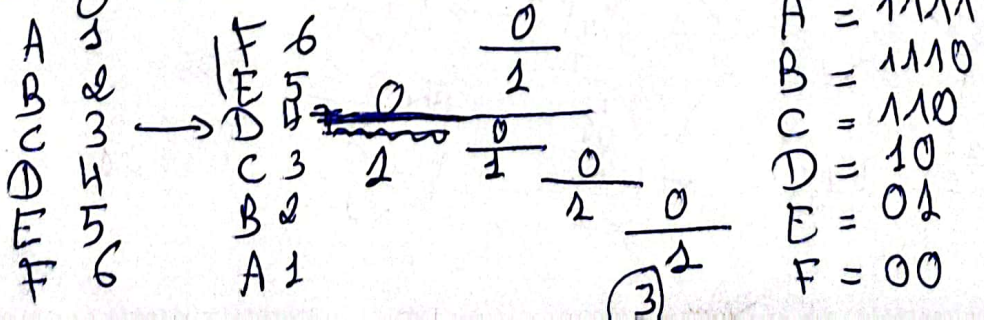
-5- $\overline{n} = \sum_{i=1}^{6} n_i P_i = 4\times\frac{1}{21} + 4\times\frac{2}{21} + 3\times\frac{3}{21} + 2\times\frac{4}{21} + 2\times\frac{5}{21} + 2\times\frac{6}{21}$

$= \frac{1}{21}(4+8+9+8+10+12) = 2,428$ bits

-6- efficacité $= \frac{H(X)}{\overline{n}} = \frac{2,398}{2,428} = 98,76\%$

-7- $R = \frac{\overline{n}}{8}\times 100 = 30,25\%$

-8- codage de Shanon-Fano :



-9 Eff $= \frac{H(X)}{\bar{n}}$

$H_{Huffman}(X) = H_{Sh-F}(X)$

$\bar{n}_{Huff} = 2,42$ bits

$\bar{n}_{Sh-F} = 2,42$ bits

} 2 codes ont même Efficacité et performances.

Exercice 6 :

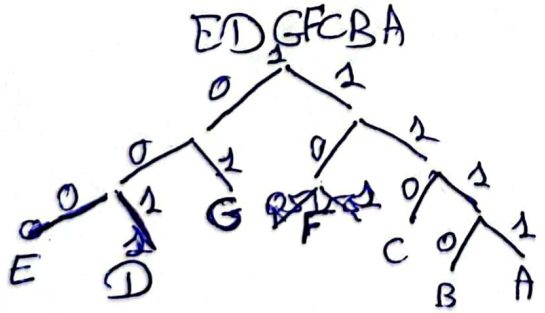
$X = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ $P_i = \{\frac{1}{28}, \frac{2}{28}, \frac{3}{28}, \frac{4}{28}, \frac{5}{28}, \frac{6}{28}, \frac{7}{28}\}$

-1-

1G 7	1G 7	1G 7	1G 7	1G 7	0ED 9	0ED 9
0F 6	0F 6	0F 6	0F 6	0F 6	1G 7	1G 7
0E 5	0E 5	0E 5	1CBA 6	1CBA 6	0F 6	1FCBA 12
1D 4	1D 4	1D 4	0E 5	0ED 9	1CBA 6	
0C 3	0C 3	1CBA 6	1D 4			
0B 2	1BA 3					
1A 1						

1FCBA 12	1FCBA 12	0EDG 16	EDGFCBA	1
0ED 9	0EDG 16	1FCBA		
1G 7				

-2-



-3-

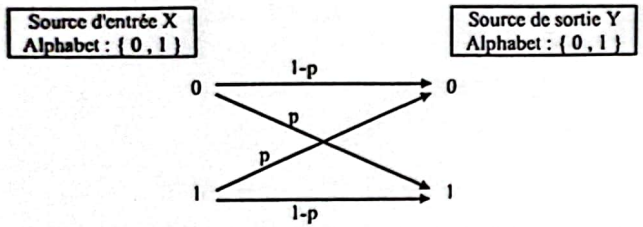
A = 1111
B = 1110
C = 110
D = 001
E = 000
F = 010
G = 011

-4- $H(X) = -\sum_{i=1}^{7} P_i \log_2(P_i) = -\left(\frac{1}{28}\log_2\left(\frac{1}{28}\right) + \frac{2}{28}\log_2\left(\frac{2}{28}\right) + \frac{3}{28}\log_2\left(\frac{3}{28}\right) + \frac{3}{28}\log_2\left(\frac{3}{28}\right) + \frac{4}{28}\log\left(\frac{4}{28}\right) + \frac{5}{28}\log_2\left(\frac{5}{28}\right) + \frac{6}{28}\log_2\left(\frac{6}{28}\right) + \frac{7}{28}\log_2\left(\frac{7}{28}\right)\right) = 2,61$ Sh

5- $\overline{n} = \sum_{i=1}^{7} n_i p_i = 4 \times \frac{1}{28} + 4 \times \frac{1}{28} + 3 \times \frac{3}{28} + 3 \times \frac{4}{28} + 3 \times \frac{5}{28} + 2 \times \frac{6}{28} + 1 \times \frac{7}{28}$

$= 2,64$ Sh

6- Efficacité $= \frac{H(X)}{\overline{n}} = \frac{2,61}{2,64} \times 100 = 98,86\%$



Sources : entrée X d'alphabet { x_1 = "0" , x_2 = "1" } et $p(x_1) = p(x_2) = 1/2$ (caractères équiprobables).
sortie Y d'alphabet { y_1 = "0" , y_2 = "1" } et $p(y_1) = ?$ $p(y_2) = ?$.

Probabilités conditionnelles p(y/x): c'est une donnée du graphe.

$p(y_1/x_1) = 1 - p$
$p(y_2/x_2) = 1 - p$
$p(y_2/x_1) = p$
$p(y_1/x_2) = p$

Probabilités jointes entre les deux sources : calculées avec la loi de Bayes $p(x , y) = p(y/x).p(x)$

$p(x_1 , y_1) = (1-p)\ 1/2$
$p(x_2 , y_1) = p\ 1/2$
$p(x_1 , y_2) = p\ 1/2$
$p(x_2 , y_2) = (1-p)\ 1/2$

Probabilités marginales de la source Y : calculées à partir des probabilités jointes $p(y_j) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i , y_j)$

$p(y_1) = (1-p)\ 1/2 + p\ 1/2 = 1/2$
$p(y_2) = p\ 1/2 + (1-p)\ 1/2 = 1/2$

Probabilités conditionnelles p(x/y) : calculées à partir de la loi de Bayes $p(x/y) = p(x , y) / p(y)$ en utilisant le résultat précédent.

$p(x_1/y_1) = 1 - p$
$p(x_1/y_2) = p$
$p(x_2/y_1) = p$
$p(x_2/y_2) = 1 - p$

Quantité d'information d'un caractère :
$I(x_1) = I(x_2) = \log_2(2) = 1$ bit
$I(y_1) = I(y_2) = \log_2(2) = 1$ bit

Entropie de chaque source:
$H(X) = 1$ bit par symbole ($= \log_2(K)$ avec K=2).
$H(Y) = 1$ bit par symbole.

Entropie jointe: calcul direct à partir de probabilités jointes.

$H(X , Y) = (1/2)(1-p)\log[2/(1-p)] + (1/2)\,p\log(2/p) + (1/2)\,p\log(2/p) + (1/2)(1-p)\log[2/(1-p)]$
$= (1-p)\log[2/(1-p)] + p\log(2/p) = (1-p)[1 - \log(1-p)] + p[1 - \log(p)]$
$= 1 - (1-p)\log(1-p) - p\log(p)$

Entropie conditionnelle moyenne:

$$H(Y/X) = \sum_i p(x_i) \sum_j p(y_j/x_i) \log \frac{1}{p(y_j/x_i)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1-p)\log\left(\frac{1}{1-p}\right) + p\log\left(\frac{1}{p}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[(1-p)\log\left(\frac{1}{1-p}\right) + p\log\left(\frac{1}{p}\right)\right]$$

$$= -(1-p)\log(1-p) - p\log(p)$$

Etant donné la symétrie des relations, $H(X/Y)$ aura, dans ce cas particulier, la même expression.

Quantité d'information mutuelle:
1er calcul à partir de l'entropie jointe.
$I(X , Y) = H(X) + H(Y) - H(X , Y)$
$= 1 + (1-p)\log(1-p) + p\log(p)$
2ème calcul à partir de l'entropie conditionnelle moyenne $H(Y/X)$:
$I(X , Y) = H(Y) - H(Y/X) = 1 + (1-p)\log(1-p) + p\log(p)$
Toujours par symétrie, la troisième méthode de calcul à partir de $H(X/Y)$ est identique au précédent.

pas d'erreur de transmission

Quelques remarques :

1. si $p = 0$ ce qui veut dire pas d'erreur de transmission alors $I(X , Y) = 1$. Similitude parfaite entre les deux sources, la transmission se passe bien. $H(X , Y) = 1$.
2. si $p = ½$, pagaille complète lors de la transmission. Dans ce cas $I(X , Y) = 0$, plus du tout de similitude entre les deux sources. $H(X , Y) = H(X) + H(Y) = 2$. Tout se passe comme si les deux sources étaient indépendantes.
3. si $p = 1$, à nouveau $I(X , Y) = 1$. Les deux sources sont à nouveau tout à fait semblables. Le fait qu'il y a dans ce cas permutation du "0" et du "1" n'ayant pas d'importance.

CamScanner